ISSN: 3060-4761
TerDPI ILMIY XABARNOMASI / SCIENTIFIC BULLETIN OF THE TerSPI / НАУЧНЫЙ ВЕСТНИК ТерГПИ

УДК: 511.524
ОРСИД: 0009-0004-5242-8217

КАРАСАКАЛОВ РЕВКАТ КЕНЕСОВИЧ
старший преподаватель Термезского государственного института.
E-mail: revkatkarasakalov@gmail.com

DARAJALI QATORLAR NAZARIYASINI LIMITLARDA QO'LLANISH

ANNOTATSIYA: Maqolada funktsiyalar limitlarini hisoblashda darajali qatorlarni qo'llashning asosiy usullari va yondashuvlari ko'rib chiqiladi. Funktsiyani darajali qatorga yoyish, ayniqsa, standart algebraik o'zgartirishlar noqulay yoki qiyin bo'lgan holatlarda, chegara o'tishlarini tahlil qilishni soddalashtirish va tezlashtirishga qanday imkon berishi ko'rsatilgan. Teylor va Maklauren qatorlardan foydalangan holda limitlarning klassik misollari keltirilgan va darajalar qatorlarini yaqinlashtirish shartlari va ularning hisob-kitoblarning to'g'riligiga ta'siri ko'rib chiqiladi. Bir tomonlama va cheksiz chegaralarni hisoblash masalasida kengayish nuqtalarini tanlash, qolgan muddatni baholash va quvvat seriyalaridan foydalanish bo'yicha amaliy tavsiyalarga alohida e'tibor beriladi. Ushbu maqola yuqori kurs talabalari va matematika fanlari o'qituvchilari, shuningdek, limitli tahlilning samarali usullariga qiziquvchilar uchun mo'ljallangan.

KALIT SO'ZLAR: *limit, noaniqlik, kuch qatori, kengayish, Lopital qoyidasi, funktsiya, koeffitsient, xuddi shunday, nuqta.*

ПРИМЕНЕНИЕ СТЕПЕННЫХ РЯДОВ ПРИ ВЫЧИСЛЕНИИ ПРЕДЕЛОВ

АННОТАЦИЯ: В статье рассматриваются основные методы и подходы к применению степенных рядов при вычислении пределов функций. Показывается, как разложение функции в степенной ряд позволяет упростить и ускорить анализ предельных переходов, особенно в ситуациях, когда стандартные алгебраические преобразования оказываются неудобными или затруднительными. Приводятся классические примеры пределов с использованием разложений Тейлора и Маклорена, обсуждаются условия сходимости степенных рядов и их влияние на корректность вычислений. Особое внимание уделено практическим рекомендациям по выбору точек разложения, оценке остаточного члена и применению степенных рядов в задаче вычисления односторонних и бесконечных пределов. Статья предназначена для студентов старших курсов и преподавателей математических дисциплин, а также для всех, кто заинтересован в эффективных методах анализа пределов.

КЛЮЧЕВЫЕ СЛОВА: *предел, неопределенность, степенной ряд, разложение, правило Лопиталя, функция, коэффициент, аналогично, точка.*

APPLICATION OF POWER SERIES IN CALCULATING LIMITS

ABSTRACT. The article discusses the basic methods and approaches to the application of power series in calculating the limits of functions. It is shown how the expansion of a function into a power series allows one to simplify and speed up the analysis of limit transitions, especially in situations where standard algebraic transformations turn out to be inconvenient or difficult. Particular attention is paid to practical recommendations for choosing expansion points, estimating the remainder term, and using power series in the problem of calculating one-sided and infinite limits. This article is intended for senior students and teachers of mathematical disciplines, as well as for anyone interested in effective methods of limit analysis.

KEYWORDS: *limit, uncertainty, power series, expansion, L'Hôpital's rule, function, coefficient, similarly, point.*

ISSN: 3060-4761
TerDPI ILMIY XABARNOMASI / SCIENTIFIC BULLETIN OF THE TerSPI / НАУЧНЫЙ ВЕСТНИК ТерГПИ

ВВЕДЕНИЕ. Выражение «предел функции» — фундаментальное понятие математического анализа, лежащее в основе непрерывности, производной и интегрирования. В общих случаях вычисление пределов требует применения различных методик: алгебраических преобразований, правил Лопиталя, эквивалентных бесконечно малых, замены переменных и др. Однако существует мощный метод — разложение функции в степенной ряд [1]-[2] (или, более конкретно, в ряд Тейлора и Макларена) — который открывает прямой путь к пониманию асимптотического поведения функций при стремлении переменной к указанной точке.

Степенные ряды обладают удобным представлением в виде бесконечной суммы степеней аргумента. При достаточно хороших условиях (сходимость в окрестности точки и аналитичность функции) разложение позволяет оценивать и вычислять пределы быстрее, чем традиционные методы.

Для начала вспомним некоторые основные понятия.

1)Предел функции $f(x)$ при $x \to a$ определяется как число A, к которому значения $f(x)$ стремятся при x стремящимся к a, и обозначается как

$$\lim_{x \to a} f(x) = A$$

Если это значение существует и конечно, то говорят, то говорят, что функция имеет предел A в точке a.

2)Степенным рядом называется выражение вида:

$$\sum_{n=0} c_n (x-a)^n,$$

где c_n - коэффициенты ряда, а a - точка разложения. В частности, если $a = 0$, то ряд называется рядом Макларена. Если степенной ряд сходится к функции $f(x)$ в некоторой окрестности точки a, то говорят, что $f(x)$ представима рядом Тейлора в этой окрестности.

3)Функция $f(x)$, аналитическая в окрестности точки a, разлагается в так называемый ряд Тейлора [3]:

$$f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{f^{(n)}(a)}{n!}(x-a)^n$$

Если $a = 0$, то получим ряд Макларена:

$$f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{f^{(n)}(0)}{n!}x^n .$$

Теперь зададимся вопросом: почему степенные ряды удобны при вычислении пределов содержащих неопределенности? Перечислим свойства которыми обладают степенные ряды и которые позволяют:

1.Упрощать сложные выражения за счёт замены их приближёнными многочленами.

2.Явно видеть главный член (главный приращающий член), который определяет поведение функции в пределе.

3.Избавляться от неопределенностей вида $\frac{0}{0}$, $\frac{\infty}{\infty}$ путём точного представления по степеням малого аргумента.

4.Оценивать остаточные члены для повышения точности приближений.

Степенные ряды удобнее всего использовать для вычисления пределов при $x \to 0$, $x \to \infty$ а также при бесконечно малых добавлениях к аргументу.[4]

Ниже приведены наиболее часто используемые разложения, которые применяются при вычислении пределов [2].

Экспонента:

$$e^x = 1 + x + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + \frac{x^4}{4!} + \dots$$

Логарифм:

$$\ln(1+x) = x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} - \dots \quad \text{для } |x| \prec 1$$

Тригонометрические функции:

$$\sin x = x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - \dots$$

$$\cos x = 1 - \frac{x^2}{2} + \frac{x^4}{24} - \dots$$

ISSN: 3060-4761
TerDPI ILMIY XABARNOMASI / SCIENTIFIC BULLETIN OF THE TerSPI / НАУЧНЫЙ ВЕСТНИК ТерГПИ

Обратные тригонометрические функции:

$$arctgx = x - \frac{x^3}{3} + \frac{x^5}{5} - \ldots \text{ для } |x| \prec 1$$

АНАЛИЗ ИСПОЛЬЗУЕМОЙ ЛИТЕРАТУРЫ. Из вышеуказанного видно, что в статье используются уже известные [1]-[3] разложения основных элементарных функций с степенной ряд Макларена. В дальнейшем будут рассмотрены примеры с использованием этих разложений при вычислении пределов содержащих неопределенности [2]. Так же необходима учитывать сходимость применяемых рядов в точке рассматриваемого предела [4].

Теперь приведем несколько примеров применения степенных рядов к вычислению пределов:

Пример 1. Вычислите предел:

$$\lim_{x\to 0}\frac{\ln(1+x)}{x}$$

Для вычисления данного примера воспользуемся разложением:

$$\ln(1+x) = x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} - \ldots \text{ для } |x| \prec 1$$

Тогда наш предел принимает вид:

$$\lim_{x\to 0}\frac{\ln(1+x)}{x} = \lim_{x\to 0}\frac{x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} - \ldots}{x} = \lim_{x\to 0}(1 - \frac{x}{2} + \frac{x^2}{3} - \ldots).$$

При $x \to 0$ все члены кроме первого равны 0, а это значит, что

$$\lim_{x\to 0}\frac{\ln(1+x)}{x} = \lim_{x\to 0}\frac{x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} - \ldots}{x} = \lim_{x\to 0}(1 - \frac{x}{2} + \frac{x^2}{3} - \ldots) = 1$$

Таким образом, $\lim_{x\to 0}\frac{\ln(1+x)}{x} = 1.$

Рассмотрим следующий предел $\lim_{x\to 0}\frac{e^{2x}-1}{x}$.

Для раскрытия неопределенности $\frac{0}{0}$, разложим функцию $f(x) = e^{2x}$ в степенной ряд.

$$e^{2x} = 1 + 2x + \frac{(2x)^2}{2!} + \ldots = 1 + 2x + 2x^2 + \ldots$$

Тогда,

$$\frac{e^{2x}-1}{x} = \frac{2x + 2x^2 + \ldots}{x} = 2 + 2x + \ldots$$

И если перейти к пределу при $x \to 0$ имеем

$$\lim_{x\to 0}\frac{e^{2x}-1}{x} = 2.$$

Аналогичным образом решается предел вида: .

$$\lim_{x\to 0}\frac{\sin x - x + \frac{x^3}{6}}{x^5}$$

В данном случае используем разложение:

$$\sin x = x - \frac{x^3}{2!} + \frac{x^5}{5!} - \ldots$$

Тогда числитель данной дроби принимает вид:

$$\sin x - x + \frac{x^3}{6} - \left(x - \frac{x^3}{6} + \frac{x^5}{120} - \ldots\right) - x + \frac{x^3}{6} = \frac{x^5}{120} - \ldots$$

И теперь вычислить исходный предел не составляет никакого труда.

$$\lim_{x\to 0}\frac{\sin x - x + \frac{x^3}{6}}{x^5} = \lim_{x\to 0}\frac{\frac{x^5}{120} - \ldots}{x^5} = \frac{1}{120}.$$

Приведем пример где используется разложение функции $f(x) = \cos x$.

Вычислим предел: $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{1-\cos x}{x^2}$.

Обычно пределы такого вида содержащие неопределенность $\dfrac{0}{0}$, принято раскрывать при помощи правила Лопиталя,[3] однако целью данной статьи является использование разложения функций в степенные ряды, при вычислении пределов содержащих неопределенность, поэтому мы будем использовать разложение:

$$\cos x = 1-\frac{x^2}{2!}+\frac{x^4}{4!}-\dots$$

И подставив его в данный предел получим:

$$\lim_{x\to 0}\frac{1-\cos x}{x^2}=\lim_{x\to 0}\frac{\frac{x^2}{2}-\frac{x^4}{24}+\dots}{x^2}=\lim_{x\to 0}\left(\frac{1}{2}-\frac{x^2}{24}+\dots\right)=\frac{1}{2}.$$

При применении разложений важно учитывать область сходимости: ряд Макларена сходится только в радиусе сходимости, который зависит от точки разложения и характера функции [2]. При выходе за пределы радиуса сходимости использовать разложение нельзя — это может привести к неверным результатам. Теорию степенных рядов можно применить и к неопределенности $\dfrac{\infty}{\infty}$.

Если требуется вычислить предел при $x\to\infty$, то удобно проводить замену:

$$t=\frac{1}{x}, t\to 0$$

Затем функции переписываются в виде выражений от t и раскладываются в степенные ряды по t. Это позволяет вернутся к уже знакомым предельным случаям.

Рассмотрим следующий пример: $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{\ln x}{x}$.

Замена $t=\dfrac{1}{x}$, даёт $\lim\limits_{t\to 0}\dfrac{-\ln x}{\frac{1}{t}}=\lim\limits_{t\to 0}(-t\ln t)$

Тут можно использовать асимптотику $t\ln t\to 0$, поэтому предел равен 0.

РЕЗУЛЬТАТЫ И ОБСУЖДЕНИЯ.

При использовании степенных рядов для раскрытия вышеуказанных неопределенностей полезно учитывать:

1)Выбирать точку разложения так, чтобы она совпадала с точкой стремления аргумента.

2)Ограничиться несколькими слагаемыми — достаточно для вычисления пределов, если только не требуется высокая точность.

3)Проверять условия сходимости — разложение можно использовать только в радиусе сходимости.

Как видно из рассмотренных примеров применение разложений функций в степенные ряды при вычислении пределов дают более точный и наиболее наглядный результат.

ЗАКЛЮЧЕНИЕ: Метод степенных рядов является мощным инструментом для вычисления пределов. Он позволяет заменить сложные функции более простыми многочленами, чётко выделить главный вклад в поведении функции при стремлении аргумента к заданной точке и избежать громоздких алгебраических преобразований. Особенно эффективен метод при работе с функциями, аналитическими в окрестности точки интереса.

Однако при всех его преимуществах важно помнить об условиях сходимости рядов и правильно оценивать остаточные члены. В противном случае можно получить неверные результаты.

Степенные ряды — это не только удобный способ решения задач на предельные переходы, но и богатый инструмент анализа, тесно связанный с дифференцированием, интегрированием и асимптотикой.

СПИСОК ИСПОЛЬЗОВАННОЙ ЛИТЕРАТУРЫ

1.Горбунов М. Л. Математический анализ. Часть 1. — Москва: Наука, 2017.
2.Кудрявцев Е. А. Практикум по математическому анализу. — Санкт-Петербург: Питер, 2019.
3.Богданов В. В. Анализ функций действительного переменного. — Москва: ЛКИ, 2021.
Симонин В. Н. Теория степенных рядов и её применение. — Москва: Физматлит, 2015.